

文章编号:1005-3085(2011)01-0050-05

## Reifenberg 区域的一种光滑化方法

洪广浩, 王立河

(西安交通大学理学院应用数学系, 西安 710049)

**摘 要:** Reifenberg 区域是在其边界上的任意一点和任意尺度下, 都满足一种局部平坦条件的区域. 我们通过考虑磨光后的区域特征函数的上水平集的途径, 提供了 Reifenberg 区域的一种光滑化方法, 包括从区域的内部逼近和外部逼近.

**关键词:** Reifenberg 区域; 磨光; 水平集

**分类号:** AMS(2000) 49Q15; 35J99

**中图分类号:** O186.1; O175.25

**文献标识码:** A

### 1 引言

**定义 1** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是一个区域, 如果存在  $0 < \delta \ll 1$  和  $R > 0$ , 使得对于任意的  $x \in \partial\Omega$  和任意的  $r \in (0, R]$ , 都存在一个单位向量  $\vec{n}(x, r) \in \mathbb{R}^n$ , 使得

$$\begin{aligned} B_r(x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y - (x - r\delta\vec{n}(x, r)), \vec{n}(x, r) \rangle < 0\} \\ \subset B_r(x) \cap \Omega \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y - (x + r\delta\vec{n}(x, r)), \vec{n}(x, r) \rangle < 0\}, \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的标准内积, 那么我们称  $\Omega$  为  $(\delta, R)$ -Reifenberg 区域.

不难验证, 条件 (1) 等价于

$$HD(\partial\Omega \cap B_r(x), T_{x,r} \cap B_r(x)) \leq \delta r, \quad (2)$$

其中  $T_{x,r}$  是过  $x$  点且垂直于  $\vec{n}(x, r)$  的超平面, 而

$$HD(A, B) := \max \left( \sup \{ \text{dist}(a, B) : a \in A \}, \sup \{ \text{dist}(b, A) : b \in B \} \right)$$

是两个集合  $A$  和  $B$  之间的 Hausdorff 距离.

这种区域由 Reifenberg 在 1960 年引进<sup>[1]</sup>, 该区域的边界可以是分形<sup>[2,3]</sup>, 但是只要  $\delta$  充分小, 其边界局部为  $n-1$  维拓扑圆盘<sup>[1,4,5]</sup>. 近年来, Kenig 和 Toro 研究了 Reifenberg 区域上的调和测度与 Poisson 核的性质<sup>[2,6,7]</sup>, 而 Byun 和 Wang 首创了 Reifenberg 区域上的椭圆型方程的研究<sup>[8,9]</sup>. 在本文中我们通过考虑磨光后的区域特征函数的上水平集的办法, 提供了 Reifenberg 区域的一种光滑化方法. 我们的结果将有助于 Reifenberg 区域上的调和分析和微分方程等方面的研究. 本文的目的是证明如下两个定理.

**定理 1** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是  $(\delta, R)$ -Reifenberg 区域,  $\delta$  足够小, 那么, 存在一列光滑区域  $\{\Omega_k\}$ , 使得

$$HD(\Omega_k, \Omega) < 4 \cdot 2^{-k} R \delta, \quad (3)$$

且  $\partial\Omega_k$  的主曲率 (在任意一点和任意方向上) 不超过  $C2^k R^{-1}\delta$ .

**定理 2** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是  $(\delta, R)$ -Reifenberg 区域,  $\delta$  足够小, 那么存在单调递增的光滑区域  $\{\Omega_k^i\}$  和单调递减的光滑区域  $\{\Omega_k^e\}$ , 使得

$$\Omega_1^i \subset \Omega_2^i \subset \cdots \subset \Omega \subset \cdots \subset \Omega_2^e \subset \Omega_1^e, \quad (4)$$

$$HD(\Omega_k^i, \Omega) < 2^{-k}R, \quad (5)$$

$$HD(\Omega_k^e, \Omega) < 2^{-k}R, \quad (6)$$

且  $\partial\Omega_k^i$  和  $\partial\Omega_k^e$  的主曲率 (在任意一点和任意方向上) 不超过  $C2^k R^{-1}\delta$ .

在本文中, 带或不带下标的字母  $C$  都表示只跟维数  $n$  有关的常数, 出现在不同位置的  $C$  不一定表示同一个值.

## 2 定理 1 的证明

选取一个适当的函数作为磨光子, 比如

$$\eta(x) := \begin{cases} C_1 \exp(-1/(1-|x|^2)), & \text{如果 } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

选择常数  $C_1$  使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1.$$

定义  $\eta_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \eta(\epsilon^{-1}x)$ , 设  $\Omega$  是一个  $(\delta, R)$ -Reifenberg 区域, 定义

$$\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1, & \text{如果 } x \in \Omega, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

用  $\eta_\epsilon$  与  $\chi_\Omega$  做卷积, 记

$$\chi_\epsilon(x) := (\chi_\Omega * \eta_\epsilon)(x) = \int_{B_\epsilon(x) \cap \Omega} \eta_\epsilon(x-y) dy.$$

那么  $\chi_\epsilon(x)$  是光滑函数, 记

$$L_\epsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \chi_\epsilon(x) = \frac{1}{2} \right\}, \quad \Omega_\epsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \chi_\epsilon(x) > \frac{1}{2} \right\}.$$

**引理 1** 对于  $\epsilon \leq R/2$ , 我们有

$$HD(L_\epsilon, \partial\Omega) < 4\delta\epsilon. \quad (7)$$

**证明** 对任意一点  $x \in L_\epsilon$ , 设  $d := \text{dist}(x, \partial\Omega)$ ,  $y \in \partial\Omega$ , 使得  $d = |y - x|$ . 显然  $d < \epsilon$ , 因为否则  $\chi_\epsilon(x) = 0$ , 或者是 1. 记

$$B_{2\epsilon}^+(y) := \{z : \langle z - (y - 2\epsilon\delta\vec{n}(y, 2\epsilon)), \vec{n}(y, 2\epsilon) \rangle < 0\} \cap B_{2\epsilon}(y),$$

$$B_{2\epsilon}^-(y) := \{z : \langle z - (y + 2\epsilon\delta\vec{n}(y, 2\epsilon)), \vec{n}(y, 2\epsilon) \rangle > 0\} \cap B_{2\epsilon}(y),$$

$$B_{2\epsilon}^0(y) := B_{2\epsilon}(y) - (A_1 \cup A_2),$$

$$T_{2\epsilon}^+(y) := \partial B_{2\epsilon}^+(y) \cap B_{2\epsilon}(y).$$

那么, 我们有  $x \in B_{2\epsilon}^0(y)$ , 且  $d \leq 4\delta\epsilon$ . 因为若  $x \in B_{2\epsilon}^+(y)$ , 则

$$\chi_\epsilon(x) = \int_{B_\epsilon(x) \cap \Omega} \eta_\epsilon(z-x) dz \geq \int_{B_\epsilon(x) \cap B_{2\epsilon}^+(y)} \eta_\epsilon(z-x) dz > \frac{1}{2},$$

第一个不等式我们用到条件(1). 同样地, 若  $x \in B_{2\epsilon}^-(y)$ , 则  $\chi_\epsilon(x) < \frac{1}{2}$ . 因此,  $x \in B_{2\epsilon}^0(y)$ , 于是  $B_{4\delta\epsilon}(x) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , 这意味着  $d \leq 4\delta\epsilon$ .

另一方面, 对任意一点  $y \in \partial\Omega$ ,  $B_{2\epsilon}^+(y) \subset \Omega$ , 而  $B_{2\epsilon}^-(y) \subset \Omega^c$ . 因此

$$\chi_\epsilon(y - \epsilon\vec{n}(y, 2\epsilon)) > \frac{1}{2}, \quad \chi_\epsilon(y + \epsilon\vec{n}(y, 2\epsilon)) < \frac{1}{2}.$$

由  $\chi_\epsilon$  的连续性, 存在  $-1 < \tau < 1$ , 使得  $\chi_\epsilon(y + \tau\epsilon\vec{n}(y, 2\epsilon)) = \frac{1}{2}$ . 而事实上, 由前面的分析知  $|\tau| < 4\delta$ .

**引理2** 设  $e_n = -\vec{n}(y, 2\epsilon)$ ,  $e$  是任何垂直于  $e_n$  的单位向量. 若  $\delta$  充分小, 那么对于任意  $x \in L_\epsilon$ , 我们有导数估计

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_n} \chi_\epsilon(x) &\geq C_2 \epsilon^{-1}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial e} \chi_\epsilon(x) \right| \leq C_3 \delta \epsilon^{-1}, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial e^2} \chi_\epsilon(x) \right| \leq C_4 \delta \epsilon^{-2}, \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial e \partial e_n} \chi_\epsilon(x) \right| &\leq C_5 \delta \epsilon^{-2}, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial e_n^2} \chi_\epsilon(x) \right| \leq C_4 \epsilon^{-2}. \end{aligned}$$

**证明**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_n} \chi_\epsilon(x) &= \left( \chi_\Omega * \frac{\partial}{\partial e_n} \eta_\epsilon \right)(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial e_n} \eta_\epsilon(x-z) dz \\ &= \int_{B_{2\epsilon}^+(y) \cap B_\epsilon(x)} \frac{\partial}{\partial e_n} \eta_\epsilon(x-z) dz + \int_{\Omega \cap B_{2\epsilon}^0(y) \cap B_\epsilon(x)} \frac{\partial}{\partial e_n} \eta_\epsilon(x-z) dz := I_1 + I_2, \\ I_1 &= \int_{T_{2\epsilon}^+(y) \cap B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-s) ds \geq \int_{T_{2\epsilon}^+(y) \cap B_{\frac{\delta}{2}}(x)} \eta_\epsilon(x-s) ds \geq C_2' \epsilon^{-n} \cdot C_2'' \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^{n-1} = C_2''' \epsilon^{-1}, \\ |I_2| &\leq \int_{B_{2\epsilon}^0(y) \cap B_\epsilon(x)} \left| \frac{\partial}{\partial e_n} \eta_\epsilon(x-z) \right| dz \leq C_2^{(4)} \epsilon^{-n} \epsilon^{-1} \cdot C_2^{(5)} \delta \epsilon^n = C_2^{(6)} \delta \epsilon^{-1}, \end{aligned}$$

其中  $y$  是  $\partial\Omega$  中距离  $x$  最近的点之一,  $I_1$  项估计的第一个等式用到 Green 公式. 若  $\delta$  足够小, 使得  $C_2^{(6)} \delta < C_2''' / 2$ , 记  $C_2 = C_2''' / 2$ , 就证明了第一个估计.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e} \chi_\epsilon(x) &= \left( \chi_\Omega * \frac{\partial}{\partial e} \eta_\epsilon \right)(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial e} \eta_\epsilon(x-z) dz \\ &= \int_{B_{2\epsilon}^+(y) \cap B_\epsilon(x)} \frac{\partial}{\partial e} \eta_\epsilon(x-z) dz + \int_{\Omega \cap B_{2\epsilon}^0(y) \cap B_\epsilon(x)} \frac{\partial}{\partial e} \eta_\epsilon(x-z) dz := I_3 + I_4, \end{aligned}$$

$I_3 = 0$ , (由 Green 公式),

$$|I_4| \leq \int_{B_{2\epsilon}^0(y) \cap B_\epsilon(x)} \left| \frac{\partial}{\partial e} \eta_\epsilon(x-z) \right| dz \leq C_2^{(6)} \delta \epsilon^{-1}, \quad (\text{同 } I_2 \text{ 的估计}).$$

记  $C_3 := C_2^{(6)}$ , 就证明了第二个估计. 其它三个可类似证明.

由隐函数定理知,  $L_\epsilon$  是一个光滑的超曲面. 设  $x, y$  和局部标架如引理 2 的假设, 那么在  $B_\epsilon(y)$  内, 我们可以设  $L_\epsilon$  是一个  $n-1$  元函数  $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) := \varphi(x_T)$  的图像.

**引理 3** 对于任意的  $n-1$  维单位向量  $\hat{e}$ , 我们有

$$\left| \frac{\partial}{\partial \hat{e}} \varphi(x_T) \right| < \frac{C_3}{C_2} \delta, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \hat{e}^2} \varphi(x_T) \right| \leq C_6 \delta \epsilon^{-1}.$$

**证明** 由隐函数定理

$$\frac{\partial}{\partial \hat{e}} \varphi(x_T) = - \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{e}} \chi_\epsilon(x_T, \varphi(x_T))}{\frac{\partial}{\partial e_n} \chi_\epsilon(x_T, \varphi(x_T))},$$

利用引理 2 的前两个导数估计, 就得到

$$\left| \frac{\partial}{\partial \hat{e}} \varphi(x_T) \right| < \frac{C_3}{C_2} \delta.$$

同样地,  $\varphi$  的 2 阶导数可以写为

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{e}^2} \varphi(x_T) = - \frac{\frac{\partial^2}{\partial \hat{e}^2} \chi_\epsilon(x_T, \varphi(x_T)) + \frac{\partial^2}{\partial e_n^2} \chi_\epsilon \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{e}} \varphi(x_T) \right]^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial e \partial e_n} \chi_\epsilon \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{e}} \varphi(x_T) \right]}{\frac{\partial}{\partial e_n} \chi_\epsilon(x_T, \varphi(x_T))}.$$

将相应的导数估计代入, 就得到

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \hat{e}^2} \varphi(x_T) \right| \leq \frac{C_4 \delta \epsilon^{-2} + C_5 \epsilon^{-2} \cdot \left( \frac{C_3}{C_2} \right)^2 \delta^2 + 2 C_4 \delta \epsilon^{-2} \cdot \frac{C_3}{C_2} \delta}{C_2 \epsilon^{-1}} \leq \frac{2 C_4 \delta \epsilon^{-2}}{C_2 \epsilon^{-1}} = C_6 \delta \epsilon^{-1},$$

其中第二个不等式用到  $\delta$  充分小.

引理 3 表明超曲面  $L_\epsilon$  在其上任意一点和任意切方向上的主曲率不超过  $C_6 \delta \epsilon^{-1}$ . 另  $\epsilon = 2^{-k} R$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 并记  $\Omega_k = \Omega_{2^{-k} R}$ , 就证明了定理 1.

### 3 定理 2 的证明

用  $\frac{3}{4}$  或  $\frac{1}{4}$  水平集代替  $\frac{1}{2}$  水平集, 就分别得到区域的内逼近和外逼近. 我们只证明内逼近的部分, 外逼近的证法完全相同. 定义

$$L_\epsilon^+ := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \chi_\epsilon(x) = \frac{3}{4} \right\}, \quad \Omega_\epsilon^+ := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \chi_\epsilon(x) > \frac{3}{4} \right\}.$$

设  $0 < C_7 < 1$ , 使得

$$\int_{\{x_n < C_7\}} \eta(x) dx = \frac{3}{4}.$$

若  $\delta$  充分小, 对于  $\epsilon \leq R/2$ , 我们有

$$(C_7 - C_8 \delta) \epsilon < HD(L_\epsilon^+, \partial \Omega) < (C_7 + C_8 \delta) \epsilon < \epsilon. \quad (8)$$

**证明** 同引理 1 的证明类似.

由距离的上下界估计 (8), 我们还能得到  $\Omega_\epsilon^+ \subset \Omega$  和  $\Omega_\epsilon^+ \subset \Omega_{\epsilon/2}^+$ , 只要  $\frac{C_7 + C_8 \delta}{2} < C_7 - C_8 \delta$ . 另外, 引理 2, 从而引理 3 的结论对  $L_\epsilon^+$  仍然成立. 值得注意的是  $I_1$  的下界估计. 对于  $x \in L_\epsilon^+$ , 只要  $\delta$  充分小,  $T_{2\epsilon}^+(y)$  在  $B_\epsilon(x)$  内的部分的半径仍然大于

$$\sqrt{1 - (C_7 + C_8 \delta)^2} \epsilon > C \epsilon,$$

将这一部分缩小一半, 则  $\eta_\epsilon$  在其上有下界  $C \epsilon^{-n}$ .

最后, 另  $\epsilon = 2^{-k} R$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 并记  $\Omega_k^+ = \Omega_{2^{-k} R}^+$ , 就证明了定理 2.

**参考文献:**

- [1] Reifenberg E R. Solution of the Plateau problem for  $m$ -dimensional surfaces of varying topological type[J]. *Acta Mathematica*, 1960, 104: 1-92
- [2] Toro T. Doubling and flatness: geometry of measures[J]. *Notices of the American Mathematical Society*, 1997, (9): 1087-1094
- [3] David G, Toro T. Reifenberg flat metric spaces, snowballs, and embeddings[J]. *Mathematische Annalen*, 1999, 315(4): 641-710
- [4] Morrey C B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*[M]. New York: Springer, 1966
- [5] Hong G H, Wang L H. A geometric approach to the topological disk theorem of Reifenberg[J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 2007, 232(2): 321-339
- [6] Kenig C E, Toro T. Harmonic measure on locally flat domains[J]. *Duke Mathematical Journal*, 1997, 87(3): 509-551
- [7] Kenig C E, Toro T. Free boundary regularity for harmonic measures and Poisson kernels[J]. *Annals of Mathematics*, 1999, 150(2): 369-454
- [8] Byun S, Wang L H. Elliptic equations with BMO coefficients in reifenberg domains[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(10): 1283-1310
- [9] Byun S, Wang L H. Elliptic equations with BMO nonlinearity in Reifenberg domains[J]. *Advances in Mathematics*, 2008, 219(6): 1937-1971

## A Smoothing Method for Reifenberg Domains

HONG Guang-hao, WANG Li-he

(Department of Applied Mathematics, College of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

**Abstract:** Reifenberg domains satisfy a kind of locally flat condition at any boundary point and at any scale. We provide a method of smoothing Reifenberg domains by considering the upper level sets of mollified characteristic functions of the domains. Our method includes interior and exterior approximations.

**Keywords:** Reifenberg domains; mollification; level sets